第四届全国大学生数学竞赛预赛试题
（非数学类）参考答案及评分标准

一、（本题共 5 小题，每小题各 6 分，共 30 分）解答下列各题（要求写出重要步骤）.

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$；

(2) 求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2，使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$；

(3) 已知函数 $z=u(x,y)e^{ax+by}$，且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,$ 确定常数 a 和 b，使函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$；

(4) 设函数 $u=u(x)$ 连续可微，$u(2)=1$，且 $\int_L (x+2y)u\,dx+(x+u^3)u\,dy$ 在右半平面上与路径无关，求 $u(x)$；

(5) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt$.

解

（1） 因为 $(n!)^{\frac{1}{n^2}}=e^{\frac{1}{n^2}\ln(n!)}$ ……………………………………（1 分）

而 $\dfrac{1}{n^2}\ln(n!)\le\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\ln 1}{1}+\dfrac{\ln 2}{2}+\cdots+\dfrac{\ln n}{n}\right)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$ ………………………（3 分）

所以 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right)=0,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln(n!)=0$， 故 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$ ……………………………………（2 分）

（2）过直线 L 的平面束为

$$\lambda(2x+y-3z+2)+\mu(5x+5y-4z+3)=0$$

即 $(2\lambda+5\mu)x+(\lambda+5\mu)y-(3\lambda+4\mu)z+(2\lambda+3\mu)=0$ ，…………………………（2 分）

若平面 π_1 过点 $(4,-3,1)$，代入得 $\lambda+\mu=0$，即 $\mu=-\lambda$，从而 π_1 的方程为

$$3x+4y-z+1=0\quad,\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{（2 分）}$$

若平面束中的平面π_2与π_1垂直，则

$$3\cdot(2\lambda+5\mu)+4\cdot(\lambda+5\mu)+1\cdot(3\lambda+4\mu)=0$$

解得$\lambda=-3\mu$，从而平面π_2的方程为$x-2y-5z+3=0$，……………………………（2 分）

（3）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{ax+by}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}+au(x+y)\right]$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{ax+by}\left[\dfrac{\partial u}{\partial y}+bu(x+y)\right]$，　………………（2 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{ax+by}\left[b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}+abu(x,y)\right].\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{（2 分）}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=e^{ax+by}\left[(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)\right],$$

若使　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$，只有

$(b-1)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)=0$，　即　$a=b=1$. ………………（2 分）

（4）由　$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u[x+u^3]\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left((x+2y)u\right)$得$\left(x+4u^3\right)u'=u$，即　$\dfrac{dx}{du}-\dfrac{1}{u}x=4u^2$　……　.（2 分）

方程通解为

$$x=e^{\ln u}\left(\int 4u^2e^{-\ln u}du+C\right)=u\left(\int 4udu+C\right)=u\left(2u^2+C\right)\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{（3 分）}$$

由$u(2)=1$得$C=0$，故　$u=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{1/3}$.　……………………………………（1 分）

（5）因为当$x>1$时，

$$\left|\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt\right|\le\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{dt}{\sqrt{t-1}}\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{（3 分）}$$

$$\le 2\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)=2\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\to 0(x\to\infty),\qquad \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\text{（2 分）}$$

所以　$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt=0$。　……………………… ………（1 分）

二、（本题 10 分）计算 $\int_0^{+\infty} e^{-2x} \mid \sin x \mid dx$

解　由于

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-2x} |\sin x| dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (-1)^{k-1} e^{-2x} \sin x dx$$ ……………………………………（3 分）

应用分部积分法

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (-1)^{k-1} e^{-2x} \sin x dx = \frac{1}{5} e^{-2k\pi}(1+e^{2\pi})$$ ………………………………（2 分）

所以

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx = \frac{1}{5}(1+e^{2\pi})\sum_{k=1}^{n} e^{-2k\pi} = \frac{1}{5}(1+e^{2\pi})\frac{e^{-2\pi}-e^{-2(n+1)\pi}}{1-e^{-2\pi}}$$ ……………（2 分）

当 $n\pi \le x < (n+1)\pi$ 时

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx \le \int_0^{x} e^{-2x} |\sin x| dx < \int_0^{(n+1)\pi} e^{-2x} |\sin x| dx,$$

令 $n \to \infty$，由两边夹法则，得

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} |\sin x| dx = \lim_{x\to\infty}\int_0^{x} e^{-2x} |\sin x| dx = \frac{1}{5}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}$$ …………………………（3 分）

注：如果最后不用夹逼法则，而用 $\int_0^{\infty} e^{-2x} |\sin x| dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx = \frac{1}{5}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}$，需先说明 $\int_0^{\infty} e^{-2x} |\sin x| dx$ 收敛.

三、（本题 10 分）求方程 $x^2 \sin\frac{1}{x} = 2x - 501$ 的近似解．精确到 0.001.

解　由泰勒公式 $\sin t = t - \frac{\sin(\theta t)}{2} t^2 \quad (0<\theta<1)$ …………………………………（2 分）

令 $t = \frac{1}{x}$　得　$\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)}{2x^2}$,

代入原方程得

$$x - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right) = 2x - 501 \qquad \text{即 } x = 501 - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)$$ ……………………………（4 分）

由此知 $x>500$，$0<\dfrac{\theta}{x}<\dfrac{1}{500}$

$$|x-501|=\frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)\right|\le\frac{1}{2}\frac{\theta}{x}<\frac{1}{1000}=0.001$$

所以，$x=501$ 即为满足题设条件的解 ....（4 分）

四、（本题 12 分）设函数 $y=f(x)$ 的二阶可导，且 $f''(x)>0, f(0)=0, f'(0)=0$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3u}$，其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $p(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

解：曲线 $y=f(x)$ 在点 $p(x,f(x))$ 处的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x),$$

令 $Y=0$，则有 $X=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，由此 $u=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，..............................（3 分）

且有

$$\lim_{x\to0}u=\lim_{x\to0}\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)=-\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}}=\frac{f'(0)}{f''(0)}=0\,.$$ ....（2 分）

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的二阶泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$$ ......（2 分）

得

$$\lim_{x\to0}\frac{u}{x}=1-\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{xf'(x)}=1-\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)}{xf'(x)}$$

$$=1-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f''(0)+o(1)}{\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}}=1-\frac{1}{2}\frac{f''(0)}{f''(0)}=\frac{1}{2}$$ ....（3 分）

$$\therefore\lim_{x\to0}\frac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3u}=\lim_{x\to0}\frac{x^3\left(\dfrac{f''(0)}{2}u^2+o(u^2)\right)}{u^3\left(\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{u}=2$$ ....（2 分）

五、（本题 12 分）求最小实数 C，使得满足 $\int_0^1 |f(x)|dx=1$ 的连续的函数 $f(x)$ 都有

$\int_0^1 f(\sqrt{x})dx \le C$

解　由于　$\int_0^1 |f(\sqrt{x})|dx=\int_0^1 |f(t)|2tdt \le 2\int_0^1 |f(t)|dt=2,$ ………………………（4 分）

另一方面, 取 $f_n(x)=(n+1)x^n$, 则　$\int_0^1 |f_n(x)|dx=\int_0^1 f_n(x)dx=1.$ …………………（3 分）

而 $\int_0^1 f_n(\sqrt{x})dx=2\int_0^1 tf_n(t)dt=2\frac{n+1}{n+2}=2\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\to 2\ (n\to\infty).$ …………………（3 分）

因此最小的实数 $C=2.$　　　　　　　　　　…………………………………（2 分）

六、（本题 12 分）设 $f(x)$ 为连续函数，$t>0$。区域 Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2\ (t>0)$ 所围起来的部分. 定义三重积分

$$F(t)=\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)dv。$$

求 $F(t)$ 的导数 $F'(t)$.

解法 1.　记 $g=g(t)=\frac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$，则 Ω 在 xy 面上的投影为 $x^2+y^2\le g$　　….（2 分）

在曲线 $S:\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x^2+y^2+z^2=t^2 \end{cases}$ 上任取一点 (x,y,z)，则原点到的点的射线和 z 轴的夹角为　$\theta_t=\arccos\frac{z}{t}=\arccos\frac{g}{t}$. 取 $\Delta t>0$，则 $\theta_t>\theta_{t+\Delta t}$. 对于固定的 $t>0$，考虑积分差 $F(t+\Delta t)-F(t)$，这是一个在厚度为 Δt 的球壳上的积分. 原点到球壳边缘上的点的射线和 z 轴夹角在 $\theta_{t+\Delta t}$ 和 θ_t 之间. 我们使用球坐标变换来做这个积分，由积分的连续性可知，存在 $\alpha=\alpha(\Delta t)$，$\theta_{t+\Delta t}\le\alpha\le\theta_t$，使得

$$F(t+\Delta t)-F(t)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\alpha}d\theta\int_t^{t+\Delta t}f(r^2)r^2\sin\theta dr.$$ ……………………（4 分）

这样就有 $F(t+\Delta t)-F(t)=2\pi(1-\cos\alpha)\int_t^{t+\Delta t}f(r^2)r^2dr$. 而当 $\Delta t\to 0^+$，

$$\cos\alpha \to \cos\theta_t = \frac{g(t)}{t}, \quad \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} f(r^2)r^2 dr \to t^2 f(t^2).$$

故$F(t)$的右导数为

$$2\pi\left(1-\frac{g(t)}{t}\right)t^2 f(t^2) = \pi\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right)t\,f(t^2). \quad \text{..................（4 分）}$$

当$\Delta t < 0$，考虑$F(t)-F(t+\Delta t)$可以得到同样的左导数. 因此

$$F'(t) = \pi\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right)t\,f(t^2) \quad \text{............................（2 分）}$$

解法 2.. 令$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \\ z = z \end{cases}$

则Ω：$\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le a \\ r^2 \le z \le \sqrt{t^2-r^2} \end{cases}$，其中$a$满足$a^2+a^4=t^2$，$a=\dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$ ....(2 分）

故有

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}} f(r^2+z^2)dz = 2\pi\int_0^a r\left(\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-a^2}} f(r^2+z^2)dz\right)dr \quad \text{.......（2 分）}$$

从而有

$$F'(t) = 2\pi\left(a\int_{a^2}^{\sqrt{t^2-a^2}} f(a^2+z^2)dz\frac{da}{dt} + \int_0^a rf(r^2+t^2-r^2)\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}dr\right) \text{....（4 分）}$$

注意到 $\sqrt{t^2-a^2} = a^2$，第一个积分为 0，我们得到

$$F'(t) = 2\pi f(t^2)t\int_0^a r\frac{1}{\sqrt{t^2-r^2}}dr = -\pi t f(t^2)\int_0^a \frac{d(t^2-r^2)}{\sqrt{t^2-r^2}},$$

所以 $F'(t) = 2\pi t f(t^2)\left(t-a^2\right) = \pi t f(t^2)\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right)$. ....（4 分）

七、（本题 14 分）设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$为正项级数，

（1）若$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>0$，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

（2）若$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$，且$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散。

证明：（1）设 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=2\delta>\delta>0$，则存在 $N\in\mathbf{N}$,对于任意的 $n\geq N$ 时,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\delta,\qquad \frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta a_{n+1},\qquad a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right),$$

……………（4 分）

$$\sum_{n=N}^{m}a_{n+1}\leq\frac{1}{\delta}\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)\leq\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right)\leq\frac{1}{\delta}\frac{a_N}{b_N},$$

因而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和有上界,从而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. ………………………………（4 分）

（2）若 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)<\delta<0$ 则存在 $N\in\mathbf{N}$,对于任意的 $n\geq N$ 时,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{b_n}{b_{n+1}}$$

…………………………………（3 分）

有

$$a_{n+1}>\frac{b_{n+1}}{b_n}a_n>\cdots>\frac{b_{n+1}}{b_n}\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdots\frac{b_{N+1}}{b_N}a_N=\frac{a_N}{b_N}b_{n+1}$$

于是由 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散,得到 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. ………………………………（3 分）