第三届中国大学生数学竞赛赛区赛

试题参考答案

(数学类, 2011)

一、 (本题 15 分) 已知四点 $A(1,2,7)$, $B(4,3,3)$, $(5,-1,6)$, $(\sqrt{7},\sqrt{7},0)$. 试求过这四点的球面方程.

解答: 设所求球面的球心为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, 则

$$\begin{aligned} & (\bar{x}-1)^2+(\bar{y}-2)^2+(\bar{z}-7)^2 \\ = \;& (\bar{x}-4)^2+(\bar{y}-3)^2+(\bar{z}-3)^2 \\ = \;& (\bar{x}-5)^2+(\bar{y}+1)^2+(\bar{z}-6)^2 \\ = \;& (\bar{x}-\sqrt{7})^2+(\bar{y}-\sqrt{7})^2+\bar{z}^2. \end{aligned}$$

.... (8 分)

即

$$\begin{cases} 3\bar{x}+\bar{y}-4\bar{z}=-10, \\ 4\bar{x}-3\bar{y}-\bar{z}=4, \\ (\sqrt{7}-1)\bar{x}+(\sqrt{7}-2)\bar{y}-7\bar{z}=-20. \end{cases}$$

.... (10 分)

解得 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(1,-1,3)$. 而 .... (14 分)

$$(\bar{x}-1)^2+(\bar{y}-2)^2+(\bar{z}-7)^2=25.$$

于是所求球面方程为

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25.$$

.... (15 分)

二、(本题 10 分) 设 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数. 求证: 存在 $\xi \in [0,1]$, 使得

$$\prod_{k=1}^{n} f_k(\xi) \leq \prod_{k=1}^{n} \int_0^1 f_k(x)\,dx.$$

证明: 记

$$a_k = \int_0^1 f_k(x)\,dx, \qquad \forall\, k = 1, 2, \ldots, n.$$

当某个 $a_k = 0$ 时, 结论是平凡的. ………………………………… (1 分)

下设 $a_k > 0$ $(\forall\, k = 1, 2, \ldots, n)$. 我们有

$$\int_0^1 \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k(x)}{a_k}}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x)}{a_k}\,dx = 1.$$

……………………………………………………………… (8 分)

由此立即可得存在 $\xi \in [0,1]$ 使得

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k(\xi)}{a_k}} \leq 1.$$

结论得证. ……………………………………………………… (10 分)

□

三、(本题 15 分) 设 F^n 是数域 F 上的 n 维列空间, $\sigma: F^n \to F^n$ 是一个线性变换. 若 $\forall A \in M_n(F)$, $\sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha)$, $(\forall \alpha \in V)$, 证明: $\sigma = \lambda \cdot \mathrm{id}_{F^n}$, 其中 λ 是 F 中某个数, id_{F^n} 表示恒同变换.

证明: 设 σ 在 F^n 的标准基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 B, 则 $\sigma(\alpha) = B\alpha\,(\forall \alpha \in F^n)$. .... (5 分)

由条件: $\forall A \in M_n(F), \sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha), \forall \alpha \in F^n$, 有 $BA\alpha = AB\alpha, \forall \alpha \in F^n$. 故 $AB = BA$, $(\forall A \in M_n(F))$ .... (10 分)

设 $B = (b_{ij})$, 取 $A = \mathrm{diag}\,(1, \cdots, 1, c, 1, \cdots, 1)$, 其中 $c \neq 0, 1$, 由 $AB = BA$ 可得 $b_{ij} = 0, \forall i \neq j$. 又取 $A = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$, 这里 E_{st} 是 $(s\ t)-$ 位置为 1 其它位置为 0 的矩阵.则由 $AB = BA$ 可得 $a_{ii} = a_{jj}$, $(\forall i, j)$. 取 $\lambda = a_{11}$. 故 $B = \lambda I_n$, 从而 $\sigma = \lambda \cdot \mathrm{id}_{F^n}$ .... (15 分)

四、 (本题 10 分) 对于 ΔABC, 求 $3\sin A+4\sin B+18\sin C$ 的最大值.

解答: 三角形三个角 A,B,C 的取值范围为

$$(A,B,C)\in D\equiv\{(\alpha,\beta,\gamma)|\alpha+\beta+\gamma=\pi,\alpha>0,\beta>0,\gamma>0\}.$$

我们首先考虑 $3\sin A+4\sin B+18\sin C$ 在 D 的闭包

$$E=\{(\alpha,\beta,\gamma)|\alpha+\beta+\gamma=\pi,\alpha\geq 0,\beta\geq 0,\gamma\geq 0\}$$

上的最大值. .... (1 分)

我们有

$$\begin{aligned}
&\max_{(A,B,C)\in E}(3\sin A+4\sin B+18\sin C)\\
=&\max_{\substack{A+C\leq\pi\\ A,C\geq 0}}(3\sin A+4\sin(A+C)+18\sin C)\\
=&\max_{0\leq C\leq\pi}\ \max_{0\leq A\leq\pi-C}\Big((3+4\cos C)\sin A++4\sin C\cos A+18\sin C\Big)\\
=&\max_{0\leq C\leq\pi}\left(\sqrt{(3+4\cos C)^2+16\sin^2 C}+18\sin C\right)\\
=&\max_{0\leq C\leq\pi}(\sqrt{25+24\cos C}+18\sin C).
\end{aligned}$$

.... (4 分)

考虑

$$f(C)=\sqrt{25+24\cos C}+18\sin C,\qquad 0\leq C\leq\pi.$$

易见

$$f(C)\geq f(\pi-C),\qquad\forall\, C\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

.... (5 分)

直接计算得

$$f'(C)=18\cos C-\frac{12\sin C}{\sqrt{25+24\cos C}}.$$

.... (6 分)

计算得 $f'(C)=0$ 等价于

$$(8\cos C-1)(27\cos^2 C+32\cos C+4)=0.$$

从而它在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 的解为 $C=\arccos\frac{1}{8}$. .... (7 分)

于是

$$\begin{aligned}&\max_{0\le C\le\pi} f(C)=\max_{0\le C\le\frac{\pi}{2}} f(C)=\max\left\{f(\arccos\frac{1}{8}),f(0),f(\frac{\pi}{2})\right\}\\=&\max\left\{\frac{35\sqrt{7}}{4},7,23\right\}=\frac{35\sqrt{7}}{4}.\end{aligned}$$

.... (8 分)

由此可得

$$\max_{(A,B,C)\in E}(3\sin A+4\sin B+18\sin C)=\frac{35\sqrt{7}}{4},$$

另一方面, 不难看到 $3\sin A+4\sin B+18\sin C$ 在 E 的边界上 $(A,B,C$ 之一为零$)$ 的最大值为 22. .... (9 分)

所以所求最大值为 $\frac{35\sqrt{7}}{4}$. .... (10 分)

五、 (本题 15 分) 对于任何实数 α, 求证存在取值于 $\{-1,1\}$ 的数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 满足

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}\Big)=\alpha.$$

证明: 由 Taylor 展式, $\forall\, x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, 存在 $\xi\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 使得

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8(1+\xi)^{\frac{3}{2}}}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

从而

$$\Big|\sqrt{1+x}-\big(1+\frac{x}{2}\big)\Big|\leq x^2,\qquad \forall\, x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}].$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2 分)

于是当 $n\geq 2$ 时, 不管我们怎么选取只取值 ±1 的数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$, 均有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\Big|\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2\sqrt{n}}\Big|\\
=\;&\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\Big|\sqrt{1+\frac{a_k}{n}}-\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{a_k}{2n})\Big|\\
\leq\;&\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{a_k}{n}\Big)^2\leq\frac{1}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (5 分)

可以有很多种方法选取只取值 ±1 的数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2\sqrt{n}}=\alpha.$$

此时就成立

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}\Big)=\alpha.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (6 分)

例如, 我们可以按以下方式选取: 取 $a_1=1$, 依次定义

$$a_{n+1}=\begin{cases}1, & \text{如果 } \sum_{k=1}^{n} a_k < 2\alpha\sqrt{n}, \\ -1, & \text{如果 } \sum_{k=1}^{n} a_k \ge 2\alpha\sqrt{n}.\end{cases}$$

. . . . (10 分)

记

$$y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad n=1,2,\ldots.$$

我们有

$$-\sqrt{n}\le y_n\le\sqrt{n}.$$

若 $y_n>2\alpha$, 我们有

$$\begin{aligned} y_{n+1}-y_n &= \frac{y_n\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}-y_n \\ &= -\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+y_n}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}, \end{aligned}$$

这时

$$-\frac{2}{\sqrt{n+1}}<y_{n+1}-y_n<0;$$

. . . . (12 分)

而当 $y_n<2\alpha$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} y_{n+1}-y_n &= \frac{y_n\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}}-y_n \\ &= \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-y_n}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}; \end{aligned}$$

这时

$$0<y_{n+1}-y_n<\frac{2}{\sqrt{n+1}};$$

于是当 $y_{n+1}-2\alpha$ 和 $y_n-2\alpha$ 同号时,

$$|y_{n+1}-2\alpha|\le|y_n-2\alpha|,$$

而当 $y_{n+1}-2\alpha$ 和 $y_n-2\alpha$ 异号时,

$$|y_{n+1}-2\alpha| \le |y_{n+1}-y_n| \le \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

一般地有

$$|y_{n+1}-2\alpha| \le \max(|y_n-2\alpha|, \frac{2}{\sqrt{n+1}}).$$

…………………………………………………………… (14 分)

注意到对任何 $N>0$, 总有 $m \ge N$, 使得 $y_{m+1}-2\alpha$ 和 $y_m-2\alpha$ 异号. 由上面的讨论可得到

$$|y_k-2\alpha| \le \frac{2}{\sqrt{m+1}} \le \frac{2}{\sqrt{N+1}}, \qquad \forall\, k=m+1, m+2, \ldots.$$

因此, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 2\alpha$. …………………………………………… (15 分)

□

六、(本题 20 分) 设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵. 证明: A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是可逆矩阵, C 是幂零阵, 即存在 m 使得 $C^m = 0$.

证明: 设 V 是 F上 n 维线性空间, σ 是 V 上线性变换, 它在 V 的一组基下的矩阵为 A. 下面证明存在 $\sigma-$不变子空间 V_1, V_2 满足 $V = V_1 \oplus V_2$, 且 $\sigma|_{V_1}$ 是同构, $\sigma|_{V_2}$ 是幂零变换.

首先有子空间升链: $\operatorname{Ker}\sigma \subseteq \operatorname{Ker}\sigma^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker}\sigma^k \subseteq \cdots$ 从而存在正整数 m 使得 $\operatorname{Ker}\sigma^m = \operatorname{Ker}\sigma^{m+i}$, $(i = 1, 2, \cdots)$. 进而有 $\operatorname{Ker}\sigma^m = \operatorname{Ker}\sigma^{2m}$.
(7 分)

下面证明 $V = \operatorname{Ker}\sigma^m \oplus \operatorname{Im}\sigma^m$.

$\forall \alpha \in \operatorname{Ker}\sigma^m \bigcap \operatorname{Im}\sigma^m$, 由 $\alpha \in \operatorname{Im}\sigma^m$, 存在 $\beta \in V$, 使得 $\alpha = \sigma^m(\beta)$. 由此 $0 = \sigma^m(\alpha) = \sigma^{2m}(\beta)$, 所以 $\beta \in \operatorname{Ker}\sigma^{2m}$, 从而 $\beta \in Ker\sigma^m = \operatorname{Ker}\sigma^{2m}$. 故 $\alpha = \sigma^m(\beta) = 0$. $\operatorname{Ker}\sigma^m \bigcap \operatorname{Im}\sigma^m = (0)$, 从而 $V = \operatorname{Ker}\sigma^m \oplus \operatorname{Im}\sigma^m$. (12 分)

由 $\sigma(\operatorname{Ker}\sigma^m) \subseteq \operatorname{Ker}\sigma^m$， $\sigma(\operatorname{Im}\sigma^m) \subseteq \operatorname{Im}\sigma^m$ 知 $\operatorname{Ker}\sigma^m, \operatorname{Im}\sigma^m$ 是 $\sigma-$不变子空间. 又由 $\sigma^m(\operatorname{Ker}\sigma^m) = (0)$ 知 $\sigma|_{\operatorname{Ker}\sigma^m}$ 是幂零变换. 由 $\sigma(\operatorname{Im}\sigma^m) = \operatorname{Im}\sigma^m$ 知 $\sigma|_{\operatorname{Im}\sigma^m}$ 是满线性变换, 从而可逆. .... (17 分)

从 $V_1 = \operatorname{Im}\sigma^m, V_2 = \operatorname{Ker}\sigma^m$ 中各找一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$; $\beta_1, \cdots, \beta_t$，合并成 V 的一组基, σ 在此基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是 $\sigma|_{V_1}$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 下的矩阵, 从而可逆; C 是 $\sigma|_{V_2}$ 在基 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 下的矩阵, 是幂零矩阵. 从而 A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是可逆矩阵, C 是幂零矩阵. .... (20 分)

==

注: 如果视 F 为复数域直接用若当标准型证明, 证明正确可以给 10 分:
存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}\left(J(\lambda_1, n_1), \cdots, J(\lambda_s, n_s), J(0, m_1), \cdots, J(0, m_t)\right),$$

其中 $J(\lambda_i, n_i)$ 是特征值为 λ_i 的阶为 n_i 的若当块，$\lambda_i \neq 0$; $J(0, m_j)$ 特征值为 0 的阶为 m_j 的若当块. …………………………………… (5 分)

令

$$B = \operatorname{diag}(J(\lambda_1, n_1), \cdots, J(\lambda_s, n_s)),$$

$$C = \operatorname{diag}(J(0, m_1), \cdots, J(0, m_t)),$$

则 B 为可逆矩阵, C 为幂零矩阵, A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$. ………… (10 分)

七、 (本题 15 分) 设 $F(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调递减函数, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} F(t)\sin\frac{t}{n}\,dt=0$.

证明: (i) $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)=0$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{+\infty} F(t)\sin(xt)\,dt=0$.

证明: 首先, 对任何 $x\in\mathbb{R}$, 不难由关于无穷积分收敛性的 Dirichlet 判别法得到 $\int_0^{+\infty} F(t)\sin(xt)\,dt$ 收敛. 下记

$$f(x)=\int_0^{+\infty} F(t)\sin(xt)\,dt, \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

由于 F 单调下降,

$$\begin{aligned}
& \int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} F(nt)\sin t\,dt \\
= & \int_0^{\pi}\Big(F(2nk\pi+nt)-F(2nk\pi+2n\pi-nt)\Big)\sin t\,dt \\
\geq & \ 0, \qquad \forall\, k=0,1,2,\dots.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
f\Big(\frac{1}{n}\Big) &= \int_0^{+\infty} F(t)\sin\frac{t}{n}\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} nF(nt)\sin t\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} nF(nt)\sin t\,dt \\
&\geq \int_0^{2\pi} nF(nt)\sin t\,dt \\
&= \int_0^{\pi} n\Big(F(nt)-F(2n\pi-nt)\Big)\sin t\,dt \\
&\geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\Big(F(nt)-F(2n\pi-nt)\Big)\sin t\,dt \\
&\geq n\Big[F\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)-F\Big(\frac{3n\pi}{2}\Big)\Big]\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt \\
&= n\Big[F\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)-F\Big(\frac{3n\pi}{2}\Big)\Big] \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5\text{ 分})$$

结合 $\lim\limits_{n\to+\infty} f\Big(\dfrac{1}{n}\Big)=0$ 得

$$\lim_{n\to+\infty} n\Big[F\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)-F\Big(\frac{3n\pi}{2}\Big)\Big]=0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7\text{ 分})$$

这样, 任取 $\delta>0$, 有 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时, 有

$$n\Big|F\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)-F\Big(\frac{3n\pi}{2}\Big)\Big|\le\delta.$$

从而对任何 $m>0$, $n>N$ 有

$$\begin{aligned}
0 &\le nF\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\\
&\le \sum_{k=0}^{m} n\Big|F\Big(\frac{3^k n\pi}{2}\Big)-F\Big(\frac{3^{k+1}n\pi}{2}\Big)\Big| + nF\Big(\frac{3^{m+1}n\pi}{2}\Big)\\
&\le \sum_{k=0}^{m}\frac{\delta}{3^k}+nF\Big(\frac{3^{m+1}n\pi}{2}\Big)\\
&\le \frac{3\delta}{2}+nF\Big(\frac{3^{m+1}n\pi}{2}\Big).
\end{aligned}$$

上式中令 $m\to+\infty$, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$ 得到

$$0\le nF\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\le\frac{3\delta}{2},\qquad \forall\, n>N.$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} nF\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)=0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9\text{ 分})$$

进一步利用单调性, 当 $x>\dfrac{\pi}{2}$ 时, 有

$$0\le xF(x)\le\pi\Big[\frac{2x}{\pi}\Big]F\Big(\Big[\frac{2x}{\pi}\Big]\cdot\frac{\pi}{2}\Big),$$

其中 $[s]$ 表示实数 s 的整数部分. 于是可得

$$\lim_{x\to+\infty} x\,F(x)=0.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (10 分)

从而又知 $xF(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界, 设上界为 $M \geq 0$.

$\forall \varepsilon \in (0,\pi)$, 当 $x>0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x)=\int_0^{+\infty} x^{-1}F(x^{-1}t)\sin t\,dt \\ &\leq \int_0^{\pi} x^{-1}t\,H(x^{-1}t)\,\frac{\sin t}{t}\,dt \end{aligned}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (12 分)

$$\leq x^{-1}\varepsilon\,H(x^{-1}\varepsilon)\int_\varepsilon^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt+M\varepsilon, \qquad \forall\, x>0.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (14 分)

于是

$$0\leq \varlimsup_{x\to 0^+} f(x)\leq M\varepsilon.$$

由 $\varepsilon\in(0,\pi)$ 的任意性, 可得 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$.

进而因 f 是奇函数推得 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. $\dots\dots\dots$ (15 分)

□